Вирішимо пряму задачу лінійного програмування симплексним методом, з використанням симплексного таблиці.

Оскільки в правій частині присутні негативні значення, помножимо відповідні рядки на (-1).

Визначимо максимальне значення цільової функції F (X) = x 1 + x 2 при наступних умовах-обмежень.

- 3x 1 + 2x 2 ≤ 6

x 1 + 2x 2 ≥ 3

x 1 ≤ 3

x 2 ≤ 5

Для побудови першого опорного плану систему нерівностей приведемо до системи рівнянь шляхом введення додаткових змінних **(перехід до канонічної формі).**

-3x 1 + 2 x 2 + 1x 3 + 0x 4 + 0x 5 + 0x 6 = 6

1x 1 + 2x 2 + 0x 3-1x 4 + 0x 5 + 0x 6 = 3

1x 1 + 0x 2 + 0x 3 + 0x 4 + 1x 5 + 0x 6 = 3

0x 1 + 1x 2 + 0x 3 + 0x 4 + 0x 5 + 1x 6 = 5

Введемо штучні змінні x: в 2-м рівність вводимо змінну x 7;

-3x 1 + 2x 2 + 1x 3 + 0x 4 + 0x 5 + 0x 6 + 0x 7 = 6

1x 1 + 2x 2 + 0x 3-1x 4 + 0x 5 + 0x 6 + 1x 7 = 3

1x 1 + 0x 2 + 0x 3 + 0x 4 + 1x 5 + 0x 6 + 0x 7 = 3

0x 1 + 1x 2 + 0x 3 + 0x 4 + 0x 5 + 1x 6 + 0x 7 = 5

Для постановки задачі на максимум цільову функцію запишемо так:

F (X) = x 1 + x 2 - Mx 7 → max

З рівнянь виражаємо штучні змінні:

x 7 = 3-x 1-2x 2 + x 4

які підставимо в цільову функцію:

F (X) = (1 +1 M) x 1 + (1 +2 M) x 2 + (-1M) x 4 + (-3M) → max

Матриця коефіцієнтів A = a (ij) цієї системи рівнянь має вигляд:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| -3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 2 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Вирішимо систему рівнянь щодо базисних змінних:

x 3, x 7, x 5, x 6,

Вважаючи, що **вільні змінні** рівні 0, отримаємо перший опорний план:

X1 = (0,0,6,0,3,5,3)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x 1 | x 2 | x 3 | x 4 | x 5 | x 6 | x 7 |
| x 3 | 6 | -3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x 7 | 3 | 1 | 2 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 |
| x 5 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| x 6 | 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| F (X0) | -3M | -1-1M | -1-2M | 0 | 1M | 0 | 0 | 0 |

Переходимо до основного алгоритму симплекс-метода.

**Ітерація № 0.**

Поточний опорний план неоптимальний, тому що в індексному рядку знаходяться негативні коефіцієнти.

В якості ведучого виберемо стовпець, відповідний змінної x 2, так як це найбільший коефіцієнт за модулем.

Обчислимо значення D i по рядках як частка від ділення: b i / a i2

і з них виберемо найменше:

Отже, 2-ий рядок є провідною.

Дозволяє елемент дорівнює (2) і стоїть на перетині провідного стовпця і ведучою рядка.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x 1 | x 2 | x 3 | x 4 | x 5 | x 6 | x 7 | min |
| x 3 | 6 | -3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 |
| x 7 | 3 | 1 | **2** | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | **1 1/2** |
| x 5 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | - |
| x 6 | 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 |
| F (X1) | -3M | -1-1M | **-1-2M** | 0 | 1M | 0 | 0 | 0 | 0 |

Отримуємо нову симплекс-таблицю:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x 1 | x 2 | x 3 | x 4 | x 5 | x 6 | x 7 |
| x 3 | 3 | -4 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 |
| x 2 | 1 1/2 | 1/2 | 1 | 0 | -1 / 2 | 0 | 0 | 1/2 |
| x 5 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| x 6 | 3 1/2 | -1 / 2 | 0 | 0 | 1/2 | 0 | 1 | -1 / 2 |
| F (X1) | 1 1/2 | -1 / 2 | 0 | 0 | -1 / 2 | 0 | 0 | 1/2 +1 M |

**Ітерація № 1.**

Поточний опорний план неоптимальний, тому що в індексному рядку знаходяться негативні коефіцієнти.

В якості ведучого виберемо стовпець, відповідний змінної x 4, так як це найбільший коефіцієнт за модулем.

Обчислимо значення D i по рядках як частка від ділення: b i / a i4

і з них виберемо найменше:

Отже, 1-а рядок є провідною.

Дозволяє елемент дорівнює (1) і стоїть на перетині провідного стовпця і ведучою рядка.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x 1 | x 2 | x 3 | x 4 | x 5 | x 6 | x 7 | min |
| x 3 | 3 | -4 | 0 | 1 | **1** | 0 | 0 | -1 | **3** |
| x 2 | 1 1/2 | 1/2 | 1 | 0 | -1 / 2 | 0 | 0 | 1/2 | - |
| x 5 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | - |
| x 6 | 3 1/2 | -1 / 2 | 0 | 0 | 1/2 | 0 | 1 | -1 / 2 | 7 |
| F (X2) | 1 1/2 | -1 / 2 | 0 | 0 | **-1** **/** **2** | 0 | 0 | 1/2 +1 M | 0 |

Отримуємо нову симплекс-таблицю:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x 1 | x 2 | x 3 | x 4 | x 5 | x 6 | x 7 |
| x 4 | 3 | -4 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 |
| x 2 | 3 | -1 1/2 | 1 | 1/2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x 5 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| x 6 | 2 | 1 1/2 | 0 | -1 / 2 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| F (X2) | 3 | -2 1/2 | 0 | 1/2 | 0 | 0 | 0 | 1M |

**Ітерація № 2.**

Поточний опорний план неоптимальний, тому що в індексному рядку знаходяться негативні коефіцієнти.

В якості ведучого виберемо стовпець, відповідний змінної x 1, так як це найбільший коефіцієнт за модулем.

Обчислимо значення D i по рядках як частка від ділення: b i / a i1

і з них виберемо найменше:

Отже, 4-й рядок є провідною.

Дозволяє елемент дорівнює (1 1/2) і стоїть на перетині провідного стовпця і ведучою рядка.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x 1 | x 2 | x 3 | x 4 | x 5 | x 6 | x 7 | min |
| x 4 | 3 | -4 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | - |
| x 2 | 3 | -1 1/2 | 1 | 1/2 | 0 | 0 | 0 | 0 | - |
| x 5 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3 |
| x 6 | 2 | **1 1/2** | 0 | -1 / 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | **1 1/3** |
| F (X3) | 3 | **-2 1/2** | 0 | 1/2 | 0 | 0 | 0 | 1M | 0 |

Отримуємо нову симплекс-таблицю:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x 1 | x 2 | x 3 | x 4 | x 5 | x 6 | x 7 |
| x 4 | 8 1/3 | 0 | 0 | -1 / 3 | 1 | 0 | 2 2/3 | -1 |
| x 2 | 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| x 5 | 1 2/3 | 0 | 0 | 1/3 | 0 | 1 | -2 / 3 | 0 |
| x 1 | 1 1/3 | 1 | 0 | -1 / 3 | 0 | 0 | 2/3 | 0 |
| F (X3) | 6 1/3 | 0 | 0 | -1 / 3 | 0 | 0 | 1 2/3 | 1M |

**Ітерація № 3.**

Поточний опорний план неоптимальний, тому що в індексному рядку знаходяться негативні коефіцієнти.

В якості ведучого виберемо стовпець, відповідний змінної x 3, так як це найбільший коефіцієнт за модулем.

Обчислимо значення D i по рядках як частка від ділення: b i / a i3

і з них виберемо найменше:

Отже, 3-а рядок є провідною.

Дозволяє елемент дорівнює (1/3) і стоїть на перетині провідного стовпця і ведучою рядка.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x 1 | x 2 | x 3 | x 4 | x 5 | x 6 | x 7 | min |
| x 4 | 8 1/3 | 0 | 0 | -1 / 3 | 1 | 0 | 2 2/3 | -1 | - |
| x 2 | 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | - |
| x 5 | 1 2/3 | 0 | 0 | **1/3** | 0 | 1 | -2 / 3 | 0 | **5** |
| x 1 | 1 1/3 | 1 | 0 | -1 / 3 | 0 | 0 | 2/3 | 0 | - |
| F (X4) | 6 1/3 | 0 | 0 | **-1** **/** **3** | 0 | 0 | 1 2/3 | 1M | 0 |

Отримуємо нову симплекс-таблицю:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x 1 | x 2 | x 3 | x 4 | x 5 | x 6 | x 7 |
| x 4 | 10 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | -1 |
| x 2 | 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| x 3 | 5 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 | -2 | 0 |
| x 1 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| F (X4) | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1M |

Кінець ітерацій: індексна рядок не містить негативних елементів - знайдений оптимальний план

Остаточний варіант симплекс-таблиці:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x 1 | x 2 | x 3 | x 4 | x 5 | x 6 | x 7 |
| x 4 | 10 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | -1 |
| x 2 | 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| x 3 | 5 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 | -2 | 0 |
| x 1 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| F (X5) | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1M |

Оптимальний план можна записати так:

x 4 = 10

x 2 = 5

x 3 = 5

x 1 = 3

F (X) = 1 • 5 + 1 • 3 = 8