**Тема 4:Математичні моделі детермінованих сигналів. Загальна характеристика сигналів. Узагальнений ряд Фур`є.**

Сигнал - це фізичний процес, який несе інформацію.

Математична модель – дозволяє зробити сигнал об`єктом теоретичного вивчення і розрахунків. Це функціональна залежність, де аргументом являється час.

Звичайно вивчають такі властивості сигналу, які об`єктивно виступають як найбільш важливі.

Розглянемо деякі основні види сигналів:

1. Одномірні сигнали – напруга чи струм

Багатовимірні сигнали – утворюються множиною деяких одномірних сигналів: , де N-розмірність сигналу.

Приклад: система напруг на клемах багатополюсника.

Багатовимірний сигнал – впорядкована сукупність одномірних сигналів.

{}≠{}

Застосування багатовимірних сигналів доцільно при використанні для аналізу складних систем, наприклад ЕОМ.

1. а)Детерміновані сигнали – це сигнали , параметри яких можуть бути визначені з ймовірністю рівною одиниці в будь-який момент часу.

Приклад: це можуть бути імпульси(пачки імпульсів) відомої форми і розміщення в часі, а також неперервні сигнали із заданими амплітудними і фазними співвідношеннями всередині його спектру.

б)Випадкові сигнали – функція часу, значення якої завчасно передбачені бути не можуть(або передбачаються з ймовірністю <1).

Приклад: це може бути електрична напруга, яка відповідає мові; послідовність кодів на вході багатоканального приймача тощо. Власне будь-який сигнал, який несе інформацію, повинен розглядатися як випадковий.

в)Окремо виділяються випадкові сигнали та шуми.

Для аналізу випадкових сигналів визначають:

а)Закон розподілу ймовірностей, на підставі якого визначають час прибуття сигналу в певному діапазоні рівнів.

б)Спектральний розподіл потужності сигналу(тобто розподіл середньої потужності сигналу по частотам).

3. Періодичні сигнали – задовольняють умову , де

T – період(скінченне число); k – будь-яке ціле число.

Неперіодичний сигнал – сигнал, для якого не виконується умова . Періодичний детермінований сигнал – це гармонічне коливання.

 при

Спектр такого коливання – одна єдина лінія. У реальних сигналах, які мають початок і кінець, спектр розмивається.

Будь – який складний сигнал можна представити у вигляді суми гармонічних коливань з частотами k\*Ω, тобто кратними Ω=2\*π/T. Це спектральна функція, яка містить інформацію про амплітуди та фази окремих гармонік сигналу.

4. Аналогові, дискретні та цифрові сигнали

Аналогові сигнали – це сигнали, значення яких можна виміряти в будь – який момент часу.

Дискретний сигнал утворюється скінченною множиною точок на осі часу, де кожній з них відповідають відлікові значення сигналу Si .
Цифрові сигнали – відлікові значення представляються у формі чисел.

Динамічне представлення сигналу



а)Сходинки; б)Імпульси

Сигнал може бути представлений сумою деяких елементарних сигналів, які виникають в послідовні моменти часу.

Вибір елементарних сигналів в принципі довільний. Розглянемо деякі елементарні сигнали.

Функція включення(функція Хевісайда)

σ(t) – скачок функції здійснюється миттєво.

Олівер Хевісайд – англійський фізик (1850-1925).

Реально функція включення виглядає так:



Прихід із «нульового» стану в «одиничний» відбувається навпротязі 2\*ξ.

Коли параметр ξ͢→0, то процес переходу із одного стану в інший здійснюється миттєво. Це буде вже функція включення, за допомогою якої зручно описувати процеси в електричних колах.

Наступна відносно початку координат функція включення

Другий спосіб запису



Чим більше n, тим точніша апроксимація сигналу.

Приклад 1: Описати аналітично



Приклад 2: Джерело ЕРС (електрорушійної сили) e(t)=3\*106\*t, B під`єднується ідеальним ключем в момент t0=2мкс. Описати напругу на виході.

, B

При t<2мкс, U(t)=0.

Динамічне представлення довільного сигналу за допомогою функції включення

Сигнал при будь – якому t може бути представлений як сума сигналів в момент часу (0,∆,2∆…).

Якщо ∆→0, то дискретну змінну k∆ можна замінити змінною τ. Малі прирости диференційні ds=(ds/dt)\*dτ.

І тепер:

Приклад. Нехай S(t)=0 при t<0. А при t>0, S(t)=A\*t2. Знайти аналітичне представлення.

Тут S0=0 dS/dt=d(A\*t2)/dτ=2\*A\*τ. Тому .

Дельта – функція



При будь – якому виборі ξ площа дельта – функції рівна 1. Якщо ξ→0, тоді перетворюється в дельта – імпульс.

Розклад сигналу по заданій системі функцій. Ортогональні функції.

Важливе значення має розклад сигналу по різних системах ортогональних функцій.

Нескінченна система дійсних функцій φ0(x), φ1(x), φ2(x),…, φn(x).. називається ортогональною на відрізку [a,b], якщо

 , при m≠n

При цьому допускається, що ніяка функція φn(x) не рівна тотожно, тобто

Норма функції φn(x) ;

Функція називається нормованою, якщо 2=1, тобто

Система нормованих функцій, з яких кожні дві попарно ортогональні, називається ортонормованою.

Узагальнений ряд Фур`є

В математиці доведено, що довільна кусково – неперервна функція f(x), для якої виконується умова:

може бути представлена за допомогою неперервних ортогональних функцій φ0(x), φ1(x), φ2(x),…, φn(x).. у вигляді суми ряду

 Ci – коефіцієнт ряду

Тобто f(x)= C0 φ0(x)+ C1φ1(x)+ C2 φ2(x)+…+ Cnφn(x)..

Помножимо обидві частини рівняння на і про інтегруємо в інтервалі [a,b] . Всі доданки виду при m≠n перетворюються в нуль в силу ортогональності функцій та . В правій частині залишається лише один доданок :

Це дозволяє нам написати :

Ряд, в якому коефіцієнти визначені за наведеною формулою, називається загальним рядом Фур`є по даній системі.

Властивості узагальненого ряду Фур`є. Нерівність Бесселя.

При заданій системі функцій і фіксованому числі елементів ряду N ряд Фур`є забезпечує найкращу апроксимацію(в сенсі мінімуму середньоквадратичної похибки) даної функції f(x).

Середньоквадратична похибка ряду М досягає мінімуму при an=Cn.

Підставляєм в М значення an=Cn+bn. Тоді :

Переписуємо цей вираз з врахуванням того , що:

*;*

Зауваження: буде містити складові виду

в силу ортогональності.

Тому надалі будемо рахувати, що у цьому виразі залишаються лише

Тому:

Звідси слідує, що похибка апроксимації М буде мінімальною при рівності 0 останнього члена виразу. Тобто:

 *–* мінімальна СК похибка .

Враховуючи цю обставину, що >=0, можна записати наступну рівність:

Це є нерівність Бесселя, яка справедлива для будь – якої системи ортогональних функцій.

Ортогональна система є повною, якщо зі збільшенням числа її членів середньоквадратичну похибку апроксимації М можна зробити скільки завгодно малою. Умова повної системи:

При виконанні умови повноти можна рахувати, що ортогональний ряд Фур`є сходиться в середньому, тобто що :

Узагальнений ряд Фур`є для сигналів часу s(t)

Застосовуючи до сигналів s(t) ряд Фур`є можна записати так:

S(t)=

Тоді цей вираз може мати енергетичний зміст. Дійсно можна записати:

Коли рахувати, що S(t) це струм чи напруга, тоді є не що інше, як енергія сигналу в проміжку на опорі 1Ом.

Таким чином енергію сигналу можна представити в системі ортогональних функцій.

, а при використанні ортонормованої системи:

При цьому інтервал повинен бути інтервалом ортогональності для вибраної системи функцій.

Очевидно, що середня за час потужність сигналу:

Лінійний простір сигналів

Лінійний простір сигналів існує при виконанні наступних систем:

1.Будь – який сигнал uM при будь – яких t приймає лише дійсні значення.

2.Для будь – яких uM і vM існує сума ω=u+v, при чому ω також міститься в М. При цьому операція додавання:

- комутативна : u+v=v+u; -асоціативна: u+(v+x)=(u+v)+x

3.Для будь – якого сигналу sM і будь – якого зважуваного числа α визначений сигнал f=dsM.

4.Множина М містить особливий нульовий елемент φ, такий що u+φ=u для всіх uM.

Елементи лінійних просторів називаються векторами, щоб підкреслити аналогію між об`єктами лінійних просторів, векторами в математиці.

Коли розглядати математичні моделі сигналів, які приймають комплексні значення, і припустити в аксіомі 3 перемноження на комплексні числа, це – комплексний лінійний простір.

Координатний базис

Лінійний простір сигналу – це простір, де над сигналами можуть виконуватися лінійні операції. Лінійний простір може бути доповнений спеціальною структурою, яка відіграє роль системи координат.

Лінійно незалежним координатним базисом називається сукупність векторів {e1,e2,e3…}, які належать простору М, якщо

Лише у випадку одночасного перетворення в нуль всіх числових коефіцієнтів .

Якщо дано розклад деякого синалу S(t) у вигляді , то числа {C1,C2….} являються проекціями сигналу S(t) відносно вибраного координатного базису.

Коли число базисних векторів наближено велике, то такий скінченний простір називають безмежним.

Приклад: Якщо лінійний простір утворено сигналами, які описуються многочленами n-го порядку , то координатним базисом буде система одночленів {e0=1;e1=t;e2=t2;…..}.

Нормований лінійний простір

Норма – аналог довжини вектора в математиці.

Лінійний простір сигналів L є нормованим, якщо кожному сигналу s(t)L однозначно співставлено число - норма цього вектора, при цьому мають виконуватися аксіоми:

1. Норма невід`ємна, тобто , при чому тоді і лише тоді, коли s=φ.
2. Для будь – якого сигналу, помноженого на деяке число α –

1. Коли s(t) та p(t) - два сигнали з простору L , то виконується нерівність трикутника:

В радіотехніці , при чому беруться лише додатні значення кореня.

Для комплексних сигналів:

Квадрат норми сигналу рівний його енергії:

Приклад: Обчислимо енергію і норму сигналу s(t)=u\*t/τn



 ;

Метричні простори

Введення поняття МП дозволяє узагальнити нашу уяву про відстань між точками в просторі.

Лінійний простір L стає метричним, якщо кожній парі елементів u та v співставлень невід`ємне число ρ(u,v), яке називається метрикою чи відстанню між цими елементами.

Метрика повинна відповідати аксіомам:

1. Рефлективність метрики ρ(u,v) = ρ(v,u);
2. ρ(u,u)=0 при будь – яких uL;
3. Коли елемент ωL, тоды завжди ρ(u,v)≤ ρ(u,v)+ ρ(ω,v);

Звичайно метрику визначають як норму різниці двох сигналів:

ρ(u,v)=

І тоді норму можна розуміти як відстань між вибраним елементом та нульовим елементом: = ρ(u,φ)==

Поняття метрики дозволяє говорити про те, наскільки один сигнал добре апроксимує інший.

Приклад: u(t) – відрізок синусоїди , при 0≤t≤T

Вибрати амплітуду прямокутного імпульсу так, щоб забезпечити мінімальну відстань між цими сигналами.

Квадрат відстані між сигналами:

Дослідження цього виразу на екстремум показує, що мінімальна відстань буде досягатися при: A=2\*u/π=0.637\*u. При цьому :

;

Відзначимо, що енергія синусоїдального імпульса:

(тобто квадрат норми).

А норма : ; Тобто в рамках вибраної нами метрики мінімальна відстань між двома сигналами складає 44% від норми синусоїдального імпульсу.

Теорії ортогональних сигналів. Скалярний добуток сигналів.

Коли в звичайному тривимірному просторі відомі два вектори і , тоді квадрат модуля їх суми:

 

де ( )= - скалярний добуток цих векторів, який залежить від кута ψ між ними.

За аналогією обчислимо енергію суми двох сигналів u та v:

, тобто

 

На відміну від самих сигналів їх енергія неадитивна – енергія сумарного сигналу містить в собі взаємну енергію.

Порівнюючи формули 1 та 2 визначимо скалярний добуток сигналів u та v:

 

А також косинус кута між ними:

Скалярний добуток володіє наступними очевидними властивостями:

1. (u,v)≥0;
2. (u,v)=(v,u);
3. (λu,v)=λ(u,v), де λ – будь – яке число; 
4. (u+v,ω)=(u,ω)+(v,ω).

Девід Гільберт (1862-1943) – німецький математик.

Дійсний гільбертовий простір – це такий простір, в якому введено сумарний добуток 3, при чому справедливі умови 4.

Н – позначення гільбертового простору.

В математиці доведено, що в гільбертовому просторі справедлива нерівність Коші - Буняковського.

Якщо ці сигнали приймають комплексні значення, то визначають комплексний гільбертовий простір.

Приклад: Є два зміщених в часі експоненційних імпульса напруги

u1(t)=

u2(t)=

Знайти скалярний добуток а також кут між ними.

Енергія цих сигналів однакова:

Скалярний добуток:

Звідки:

Ортогональні сигнали та узагальнені ряди Фур`э

Два сигнали u та v називаються ортогональними, якщо їх скалярний добуток рівний нулю(а значить і взаємна енергія).

Ці сигнали «гранично» не подібні один на одного.

Узагальнений ряд Фур`є дає можливість характеризувати сигнали скінченою(але, взагальному, нескінченною) системою коефіцієнтів узагальненого ряду Ck, які представляють собою проекції вектора s(t) в гільбертовому просторі Н на базисні напрямки.

Приклад ортогонального базису

Сукупність гармонічних сигналів складає ортогональний координатний базис.

Інтервал ортогональності рівний періоду:

T=2\*π/ω1

Квадрат норми

Норма гармонічного ортогонального сигналу:

Ортонормовані базиси

Способи побудувати нескінченні системи функцій детально вивчені в математиці.

Вибір найбільш раціональної ортогональної системи функції залежить від мети, яку потрібно досягнути при розкладі складної функції(сигналу) в ряд. Серед різноманітних задач, які вимагають розкладу складного сигналу, найбільш важливими є:

1. Точний розклад на дискретні ортогональні складові;
2. Апроксимація сигналу мінімальною кількістю складових( при заданій допустимій похибці).

При першій постановці задачі найбільше розповсюдження отримала ортогональна система основних тригонометричних функцій – синуса і косинуса. Гармонічне коливання зберігає свою форму при проходженні через лінійні кола, а розклад на синус і косинус дозволяє використовувати символьні методи.

При другій постановці задачі застосовуються різноманітні ортогональні і ортонормовані системи функцій : поліноми Чебешева, Еліта, Лагерра, функції Хаара, Уолша та інші.

Ортонормована система гармонічних сигналів

Систематригонометричних функцій з крайніми частотами, доповнена постійним в часі сигналом u0 утворює ортонормований базис.

 Квадрат норми кожної з цих

 функцій =1 незалежно від

….. номера функцій.

 Система функцій Уолша

В інтервалі свого існування (-T/2;T/2) вони приймають лише значення . Введемо безрозмірний час Ѳ=t/T; будемо позначати k-y функцію Уолша wal(k,Ѳ).

Номер функції k рівний числу змін знаку на інтервалі її існування.



Рис.Графіки перших чотирьох функцій Уолша.

Умова нормування функцій Уолша при будь – якому значенні k:

Ортогональність забезпечується принципом їх побудови і може бути перевірена безпосередньо:

Розклад сигналу із скінченною енергією , заданою на інтервалі часу [-T/2;T/2] в узагальнений ряд Фур`є по функції Уолша має вигляд:

Приклад: знайти перші два коефіцієнти в розкладі імпульса трикутної форми по системі функцій Уолша. В інтервалі [-T/2;T/2] сигнал описується

S(t)=(u/T)\*(t+T/2)

**

Тобто при апроксимації ми отримуємо ступінчасту криву, але з точки зору енергетичної ця похибка не така вже велика. Дійсно, енергія імпульса:

Енергія різниці:

І складає лише 1/16 або 6.25% від енергії синусоїдального імпульсу.

**Тема 5: “Частотне представлення детермінованих періодичних сигналів”**

У частотному вигляді можуть представлятися як періодичні, так і неперіодичні детерміновані сигнали.

Необхідно зазначити, що в реальних умовах сигнали не існують, тому що ідеальний періодичний сигнал нескінченний у часі, в той час як всякий реальний сигнал має початок і кінець. Проте в багатьох випадках скінченністю часу дії сигналу можна знехтувати і для аналізу допустимо використовувати апарат, придатний для ідеальних періодичних сигналів.

**Періодичні сигнали**

Розглянемо сигнал, що виражається довільною періодичною функцією часу x(t) .

Відомо, що всяка періодична функція, що задовольняє умовам Дрихле(Умова Дрихле полягає в такому: функція x(t) повинна бути обмеженою, кусково – неперервною і мати протягом періоду скінченне число екстремальних значень), може бути подана у вигляді нескінченної, в загальному випадку, суми гармонійних складових – рядом Фур`є.

Відомі дві форми розкладу в ряд Фур`є: тригонометрична і комплексна.

Тригонометрична форма розкладу виражається і виді

Де - постійна складової функції.

 - k – а гармоніка складової.

 - амплітуда, частота і початкова фаза k – ї гармонічної складової ω=2\*π/T – частота основної гармоніки; T – період зміни функції x(t).

У математичному відношенні зручніше оперувати комплексною формою ряду Фур`є, що подається у вигляді:

Де - комплексна амплітуда гармонійної складової частоти ωk=k\*ω0.

При цьому модуль комплексної амплітуди буде дорівнювати амплітуді відповідної гармонійної складової, а аргумент дорівнює початковій фазі складової.

Комплексна амплітуда визначається через часову функція x(t) за допомогою формули:

Сукупність амплітуді відповідних частот гармонік прийнято називати спектром амплітуд. Сукупність початкових фаз і відповідних частот гармонік називаються спектром фаз.

Спектр амплітуд і спектр фаз однозначно визначають сигнал, проте для багатьох практичних задач достатньо обмежитися розглядом тільки спекта амплітуд.



На мал..2 дані графічні зображення спектра амплітуд і спектра фаз періодичного сигналу. Окремі спектральні складові в графічному зображенні спектра амплітуд називаються спектральними лініями.

Характерною рисою спектра періодичного сигналу є його переривчастість(дискретність). Відстань між сусідніми спектральними лініями однакова і дорівнює частоті основної гармоніки.

Як приклад розглянемо послідовність прямокутних імпульсів тривалістю τ, амплітудою h, і з періодом проходження T(мал..3).

Функція x(t), що описує такий сигнал, може бути представлена так:

Функція x(t) може бути представлена рядом Фур`є:

де - комплексні амплітуди k – ї гармоніки

Комплексна амплітуда:

Постійна складова сигналу може бути отримана при k =0:

**Рисунок 4**

Таким чином, розклад в ряд Фур`єперіодичної послідовності прямокутних імпульсів представляється у виді:

Як видно, при черговому збільшенні чістоти на величину 2\*π/τ фаза гармонік змінюється на розмір π.

Спектр амплітуд показаний на мал.4, причому огинаюча його визначається рівнянням:

де ω=k\*ω0

Форма згинаючої спектра амплітуд визначається видам функції , причому :

, при ω=n\*π/τ

де n – парне число.

**Тема 6. Частотне представлення періодичних сигналів. Спектральна густина. Енергетичний сенс спектра сигналу.**

Будь-який неперіодичний сигнал (рис.1) можна розглядати як періодичний, період зміни якого рівний нескінченності. В зв’язку з цим розглянутий раніше спектральний аналіз періодичних процесів може бути узагальнений і на неперіодичні сигнали.

 Розглянемо, як буде змінюватися спектр неперіодич- ного сигналу при необмеженому збільшенні періоду зміни сигналу.

 При збільшенні періоду Т інтервали між

 cуміжними частотами в спектрі сигналу і амплітуди

 спектральних складових зменшуються і в межах при

 Т → ∞ стають нескінченно малими величинами. При

 цьому ряд Фур’є, який відображає спектральний

 розклад періодичного сигналу, перетворюється в

 інтеграл Фур’є, який відображає спектральний розклад неперіодичного сигналу.

Комплексна форма інтегралу Фур’є має вид :

 x(t) = , (1)

де = – спектральна густина сигналу;

| – амплітудно-частотна характеристика сигналу;

 = фазочастотна характеристика сигналу;

Вираз (1) називають формулою зворотного перетворення Фур’є.

Представлення неперіодичної функції інтегралом Фур’є можливо при виконанні наступних умов:

1. функція x(t) задовільняє умовам Дірихле;
2. функція x(t) абсолютно інтегрована (цій умові відповідають практично всі реальні сигнали), тобто

Таким чином, спектр неперіодичного сигналу на відміну від спектру нескінченного числа гармонічних складових з нескінченно малими амплітудами.

Амплітуди гармонічних складових, виходячи з (1) , можуть бути представлені у вигляді:

dA = ,

звідки спектральна густина визначається виразом:

 = 2π

Спектральна густина зв’язана функцією сигналу через пряме перетворення Фур’є

 = (2)

Спектральна густина одночасно відображає неперіодичний сигнал і задовольняє умовам (рис.2):

1. ;
2. Модуль спектральної густини є парною, а аргумент – непарною функцією частоти, тобто:

 = ; φ(ω) = φ(-ω).



**Енергетичний сенс спектра сигналу**

Розглянемо розподіл потужності в спектрі періодичного сигналу. Для цього припустимо, що сигнал являє собою струм i(t) , який протікає по резистору R (рис.3) і описується складною неперіодичною функцією часу з періодом зміни Т.

Середня потужність, яка виділяється на R:

Pcp = ,

де = – квадрат діючого значення струму.

Представивши струм рядом Фур’є отримаємо наступний вираз для квадрату діючого значення струму:

І2 = 2 dt = + .

Отже, середня потужність :

Pcp = R (3)



Таким чином, середня потужність, яка виділяється складним періодичним струмом в резисторі, рівна сумі середніх потужностей, які виділяються в цьому резисторі окремими гармоніками струму і його постійною складовою.

Розглянемо тепер розподіл енергії в спектрі неперіодичного сигналу. Енергія, яка виділяється сигналом (струмом) в резисторі в один Ом, визначається виразом:

W =

Для визначення розподілу енергії по спектру неперіодичного сигналу виразимо енергію W через модуль спектральної густини сигналу. Квадрат модуля спектральної густини можна представити у вигляді:

 = S(j⍵)S(-j⍵), (4)

де S(-j⍵) – комплексно-спряжена функція для спектральної густини S(j⍵).

Згідно виразу S(j⍵) = , отримаємо :

S(-j⍵) =

Інтеграл від квадрату модуля спектральної густини

d⍵ = = . (5)

Змінивши в (5) порядок інтегрування, отримаємо:

d⍵ = = 2πdt.

Таким чином, енергія сигналу:

W = dt = d⍵ = d⍵. (6)

Вираз (6), який отримав назву рівності Парсеваля, показує, що енергія сигналу може бути представлена у вигляді суми нескінченно малих складових d⍵, які відповідають нескінченно малим ділянкам частотного спектру (рис.4). Вираз d⍵ представляє собою енергію, яка міститься в спектральних складових сигналу, які розміщені в смузі частот d⍵ в околі частоти ⍵.

Таким чином, квадрат модуля спектральної густини характеризує розподіл по спектру енергії сигналу.

Якщо задана енергія сигналу ∆W у визначеній смузі частот ∆⍵ в околі частоти ⍵ (рис.5), тоді модуль спектральної густини в точці ⍵к може бути знайдений із наближеної рівності:

S(⍵к) = ;



**Тема 7. Основні перетворення спектрів сигналів ( при зсуві в часі при зміні тривалості, при інтегруванні, диференціюванні та перемноженні сигналів).**

Розглядається зв’язок між перетвореннями сигналу і відповідному перетворенню змінами спектру сигналу.

1.Зсув сигналу в часі.



Нехай сигналу S1(t) відповідає (Ω). Спектральна густина сигналу S2(t) :

(Ω) = (t)dt = ( t - t0 ) dt.

Введемо нову змінну інтегрування: ( t - t0 ) = τ.

(Ω) = (τ)dτ = ( τ) dτ = (Ω).

Звідси видно, що спектральна густина отримує додатковий фазовий зсув на кут – Ωt0.

Тобто, при зсуві сигналу в часі на величину + Ωt0 амплітудно-частотна характеристика сигналу не змінюється, але всі складові спектру отримують додатковий зсув на кут + Ωt0.

Очевидне і зворотнє твердження: якщо всі складові спектру зсунути на кут + Ωt0 , то сам сигнал зсунеться в часі на + t0.

2.Зміна тривалості сигналу (відносно часу).



Нехай сигнал S1(t) підданий стиску в часі S2(t) = S1(nt).

Тривалісь S2(t) в n раз менше S1(t) і рівна :

(Ω) = (t)dτ .

Введемо нову змінну інтегрування τ = nt.

(Ω) = (τ)dt = (nt)dt.

Цей вираз (підінтегральний) представляє собою (Ω/n), тобто при частоті Ω/n;

Таким чином :

(Ω) = (Ω/n).

Ω – означає зміну масштабу по осі частот, при цьому спектр сигналу вдається розтягнути в n раз.

При стиску сигналу в n раз на часовій осі в стільки ж раз розширюється його спектр на осі частот. Модуль спектральної густини при цьому зменшується в n раз.

3.Додавання сигналів.

Оскільки перетворення Фур’є є лінійним перетворенням, то сума сигналів S1(t) + +S2(t)+…, відповідає сумі їх спектрів (Ω) = (Ω) +(Ω) +…

4.Диференціювання та інтегрування сигналів.

Диференціювання сигналу можна розглядати як по елементне диференціювання його складових. Для якої-небудь частоти Ω узагальнений ряд гармонік сигналу можна представити у вигляді: , де в квадратних дужках – амплітуда сигналу в смузі.

Продиференціювавши по t, отримаємо jΩ.

Спектральна густина похідної сигналу рівна (Ω) = jΩ(Ω).

Аналогічно, спектральна густина інтегралу сигнала рівна:

(Ω) = (Ω).

5.Добуток двох сигналів.

Нехай сигнал s(t) = f(t)g(t). Визначимо спектр такого сигналу.

(Ω) = dt = dt.

Функціям f(t) та g(t) відповідають спектральні густини та .

Кожна з цих функцій може бути записана за допомогою зворотнього перетворення Фур’є:

f(t) = dΩ ; y(t) = dΩ.

Підставимо інтеграли у вираз (Ω) , отримаємо, що

(Ω) = dx.

Інтеграл представляє собою згортку.

Спектр добутку двох функцій f(t) та g(t) рівний згортці їх спектрів та (з коефіцієнтом ).

В частковому випадку, при Ω = 0 dt = dx ; )=1.

Замінюючи x на Ω, отримаємо:

dt = dΩ = dΩ, де – комплексно-спряжена з .

Аналогічно можна показати, що згортці двох функцій часу s(t) = dτ, відповідає вираз:

dτ = dΩ.

Цей вираз використовується при аналізі проходження сигналів через лінійні кола.

6.Взаємна зворотність Ω та t в перетвореннях Фур’є.

а) нехай s(t) – функція парна відносно t. s(t)=s(-t).

Запишемо:

(Ω) = dt = dt - j dt.

Інтеграл від непарної функції в симетричних границях = 0.

 Тобто при s(t) – парній, (Ω) є функція дійсна і парна відносно Ω.

б) коли s(t) – непарна відносно t.

Тоді в нуль перетворюється перший інтеграл, де в підінтегральному виразі є добуток непарної і парної функції.

(Ω) = - j dt;

В цьому випадку (Ω) чисто уявна і непарна відносно Ω.

в) якщо s(t) не є не парною, ні не парною.

В цьому випадку її можна розкласти на s1(t) – парну і s2(t) – непарну функції. Тоді

(Ω) – комплексна величина, причому дійсна її частина парна,а уявна – непарна відносно Ω.

З пункту а) випливає,що у випадку парної функції s(t) можна довільним чином вибирати t∞ в зворотному перетворенні Фур’є:

s(t) = dΩ = dΩ.

**Тема 8. Кореляцій аналіз детермінованих сигналів. Зв’язок між спектральними та кореляційними характеристиками сигналів.**

Кореляційний аналіз застосовується до детермінованих та випадкових ( стохастичних) сигналів. Задані величини x та y треба перевірити, чи нема між ними деякого зв’язку, тобто кореляції.

Дискретні кореляційні функції. Термінологія. Коваріантність.

Нехай маємо послідовність даних xn з середнім значенням :

 = , (1) та дисперсією:

 = . (2)

Також нехай відома ще одна послідовність даних yn з середнім значенням та дисперсією . Мірою зв’язку для обох послідовностей даних та yn є коваріантність σху, яка визначається через :

σху = yn – ). (3)

Коефіцієнт кореляції. Коефіцієнт кореляції r є нормована коваріантність, причому -1≤ r ≤ 1. Нормування відбувається за рахунок ділення коваріантності на добуток стандартних відхилень σх та σу :

r = .

Якщо обидві послідовності та yn  розвиваються в одному напрямку, то вони коваріантні і коефіцієнт кореляції буде позитивним, якщо ж у протилежних, то вони контрваріантні і коефіцієнт кореляції буде негативним. Коли коефіцієнт кореляції рівний нулю, між величинами будь-яка залежність відсутня, тобто вони не корельовані. Абсолютна величина коефіцієнта кореляції буде тим ближче до 1, чим більше обидві змінні залежать одна від одної.

Регресійний аналіз.

Залежні пари та yn наносяться на площину х та у(рис).



Як апроксимаційна функція використовується пряма; її коефіцієнт нахилу b , називається коефіцієнтом регресії.

Кореляційні функції.

Послідовності даних та yn можуть бути отримані як вибірки залежних від часу функцій x(t) та y(t), тобто х(nT) = хn та y(nT) = yn.

Взаємна кореляційна функція для сигналів без постійної складової визначається як:

Φху (kT) = ;

або

Φху (kT) = ;

k – за допомогою цієї константи реалізовується затримка одного сигналу відносно іншого.

Розглянемо ще

Неперервні кореляційні функції.

Середні значення та для неперервних сигналів

 = ; = ;

Дисперсія визначається як:

 = ;

 = ;

Коваріантність між сигналами x(t) та y(t) визначається як:

σху = .

Для утворення кореляційних функцій необхідно затримати обидва залежні від часу сигнали на Т. Автокореляційні функції Φхх  та Φуу та взаємно кореляційна функція Φху – функції від часу затримки τ. Для сигналів, позбавлених постійної складової, вони визначаються як:

Φхх (τ) = ;

Φyy (τ) = ;

Φхy (τ) = ;

Нормована взаємна кореляційна функція Φхy.норм(τ) має вигляд:

Φхy.норм(τ) = .

Зображення спектра кореляційних функцій. Теорема Вінера-Хінчина.

Кореляційні функції залежні від часу. Їх можна трансформувати за допомогою перетворення Фур’є в частотну область. При цьому одержують автоспектральну густину потужності(АСЩП) Sxx та взаємоспектральну щільність потужності (ВСЩП) Sxy.

Sxx (j⍵) = dτ (4)

Sxy (j⍵) = dτ (5)

Зворотна операція також має місце.

Φхх (τ)= d⍵ (6)

Φху (τ)= d⍵ (7)

Таким чином кореляційними функціями та спектральними густинами потужності мають місце такі перетворення(теорема Рінера-Хінчина):

АКФ Φхх (τ) ↔ Sxx (j⍵) АСЩП (8)

ВКФ Φху (τ) ↔ Sxy (j⍵) ВСЩП (9)

Рівняння Ларсеваля. Рівняння Ларсеваля показує, що АСЩП дорівнює квадрату амплітудного спектру, поділеному на інтервал спостереження:

 Sxx (j⍵) = = x(j)x\*(j⍵), (10)

x\*(j⍵) – комплексно-спряжений амплітудний спектр відносно x(j). За аналогією з (10) можна записати ВСЩП як:

Sxy (j⍵) = x(j)у\*(j⍵) (11)

(j⍵) = x\*(j⍵) y(j) (12)

Властивості спектральної щільності. Залежний від часу сигнал x(t) виражає деяку визначену фізичну величину з розмірністю, наприклад, напруга у вольтах. Після трансформації Фур’є амплітудний спектр буде мати розмірність В/Гц, спектральна щільність потужності – В2/Гц. АСЩП парна, дійсна функція

Sxx (j⍵) = Sxx (-j⍵)

АСЩП Sxx (j⍵) сигналу ідеального білого шуму є стала, незалежна від частоти величина: Sxx (j⍵) = k. ВСЩП – комплексна функція Sxy (j⍵) = (j⍵) = Sxy (-j⍵). Коефіцієнт кореляції ρ(j⍵) спектральних щільностей потужності виражається через:

ρ(j⍵) = .

Функції перетворення в часовій та спектральній областях, зіставлені між собою, подані в таблиці.

|  |  |
| --- | --- |
| Часова область | Спектральна область |
| x(t) | x(j⍵) |
| x(t) = d⍵ | x(j⍵) = dt |
| Φхх = d⍵ | Sxx =  |
| Φхх  =  | Sxx (j⍵) = dτ |

1. Згідно з залежною від часу функцією x(t) обчислюється шляхом трансформації Фур’є спектральна функція x(j⍵). Тим самим стає відомий амплітудний спектр. Тепер можна отримати АСЩП, а через неї за допомогою інверсної трансформації Фур’є й АКФ.

2. Згідно з залежною від часу функцією обчислюється зразу АКФ. З неї можна обчислити спектральну функцію.

Кореляція обмежених в часі функцій.

При знаходженні кореляційних функцій обмежених в часі процесів (наприклад,імпульси), при великих проміжках усереднення у деяких випадках отримується нульове значення. Щоб запобігти тим випадкам при кореляції обмежених в часі функцій нехують діленням на 2Т. Тому формули обчислення будуть мати вигляд:

Φхх (τ) = ;

Φху (τ) = ;

Sxx (j⍵) = |x(j⍵)|2 = x(j)x\*(j⍵);

Sxy (j⍵) = x(j)y\*(j⍵);

(j⍵) = x\*(j⍵) y(j);



**Тема №9: *Модульовані сигнали. Спектри амплітудно-модульованих сигналів.***

Нехай задано високочастотне коливання:

, де (1)

A – амплітуда, – початкова фаза, – фаза коливання в момент часу . Коли та , то вираз (1) визначає гармонічне коливання, де частота – так звана несуча частота.

 Коли та зазнають примусових змін, то коливання називають *модульованим.*

 Процес управління одним із параметрів називають *модуляцією.* В залежності від того, що змінюється при модуляції – амплітуда чи кут , розрізняють два основних види модуляції: амплітудну та кутову. Кутова модуляція буває – частотною та фазовою.

 Зміна хоча б одного з параметрів – амплітуди, частоти чи фази – приводить до того, що високочастотне коливання перестане бути гармонічним та перетворюється в складне, яке складається з більшого чи меншого числа простих гармонічних коливань.

 На практиці часто приходиться зустрічатися зі змішаною модуляцією, наприклад, амплітудно-фазовою чи амплітудно-частотною.

 Освоєння надвисоких частот, а також розвиток імпульсної техніки сприяли створенню нових видів модуляції, а саме *імпульсної модуляції*. При такій модуляції сигнал що передається тим чи іншим способом змінює допоміжну імпульсну послідовність, яка, в свою чергу, модулює високочастотне коливання.

 В залежності від того, який параметр змінюється при первинній модуляції – амплітуда, тривалість чи розміщення імпульсів – розрізняють амплітудно-імпульсну модуляцію (АІМ), модуляцію по тривалості, частотно-імпульсна модуляція (ЧІМ), фазо-імпульсна модуляція (ФІМ) та інші.

Амплітудно-модульовані коливання.

 При амплітудній модуляції огинаюча амплітуда сигналу високочастотного коливання зміщується за законом зміни керуючого сигналу. Нехай цей сигнал представляє собою задану функцію часу .



 Тоді амплітудно модульоване коливання, яке зображене на рис. 2 можна представити так: , (1.1)

 де – коефіцієнт пропорційності;

 - початкова фаза коливання (при t=0);

 – амплітуда несучого коливання (при відсутності модуляції)

Розглянемо поняття **глибини модуляції:**

Якщо модулююча функція є гармонічним коливанням , то огинаючу високочастотного коливання можна записати так:

, (2)

де – частота модулюючої функції;

 *–* початкова фаза згинаючої;

 – амплітуда зміни згинаючої.

 Відношення називається коефіцієнтом глибини модуляції чи просто коефіцієнтом модуляції. Таким чином миттєве значення модульованого коливання можна записати в формі:

 (3)

 У відповідності із зміною амплітуди змінюється і середнє за період високої частоти потужність модульованого коливання. Коли – амплітуда струму в коливному контурі, то потужність яка виділяється на опорі (середня за період частоти):

.

 Цей вираз справедливий за умови, що оскільки тоді в межах одного періоду форму струму можна рахувати синусоїдною.

 Розрізняють наступні значення :

1. Потужність режиму несучої хвилі (при відсутності модуляції):
2. Потужність в максимальному режимі:

;

1. Потужність в мінімальному режимі:

1. Потужність середня за період модуляції:

*Спектр амплітудно-модульованого коливання*

 Згідно одного з параметрів високочастотного коливання в даному випадку амплітуди, приводить до утворення нових частот. Вираз (3) можна переписати наступним чином:

,

 Другий доданок в правій частоті цього виразу, є наслідком модуляції і може бути записаний так:

у відповідності з чим розгорнутий вираз для прийме наступну форму:

 Перша складова представляє собою вхідне не модульоване коливання з «несучою» частотою . Друга та третя складові відповідають новим коливанням, які появляються в процесі модуляції амплітуди. Частоти цих коливань та називають «верхньою» та «нижньою» базовими частотами модуляції. Амплітуди цих коливань однакові та складають від амплітуди не модульованого коливання частину, рівну , а їх фази симетричні відносно несучого коливання.

 Приведемо спектральну діаграму коливання при тональній (гармонічній) модуляції.



 Ширина спектру в цьому випадку рівна подвоєній частоті модуляції , а амплітуди коливання бокових частот не можуть перевищувати половини амплітуди не модульованого коливання.

 Отримані результати не важко розповсюдити на випадок модуляції будь-яким складним сигналом.

 *Розглянемо такий випадок:*

Нехай модулююче коливання рівне:

Тоді по аналогії з виразом (2) отримаємо

 Підставляючи цей вираз у (1.1) та провівши певні тригонометричні перетворення, отримаємо:

(Початкові фази несучого коливання та модулюючих коливань з частотами для спрощення опущені).

 Ми бачимо, що кожна з частот утворюють свою гармонічну модуляцію, яка супроводжує виникнення пари бокових частот.

 Побудову амплітудного спектру модульованого коливання по заданому спектру сигналу показано на рис.



а) Дискретний спектр керуючого сигналу, ;

б) спектр сигналу, який отримується при представленні кожного компонента у вигляді суми коливань з додатніми та від’ємними частотами;

в) Спектр модульованого сигналу

Тема 10. ***Спектри сигналів при вузько смуговій та низько смуговій кутовій модуляції.***

Нехай задані два гармонійних коливання з постійними, але різними частотами

 (1)

причому

 Позначимо, що , тоді перепишемо рівняння (1):

 (2)

 З (2) видно, що коливання з постійною частотою можна розглядати як коливання з частотою , але з лінійно зростаючою початковою фазою

 Таким чином коли відомо, що за час t коливання «b» випередило по фазі по фазі коливання «a» на кут , то можна стверджувати , що на протязі вказаного відрізку часу частоти перевищувала частоту на величину

 Припустимо, що протягом часу t частота коливання «b» не була постійною, таким чином різниця , була функцією часу. Тому тепер для визначення фазового зсуву в момент часу t використаємо вираз:

 (3)

Повна фаза коливання «b» буде при цьому:

 (4)

Цей вираз справедливий коли В загальному випадку, коли заданий закон зміни миттєвої частоти коливання у вигляді функції , то повна фаза за час від 0 до t визначається за допомогою виразу:

 (4.1)

 Очевидне і зворотне твердження, коли за проміжок часу dt повна фаза коливання «b» відносно коливання «a» рівна , то частотне відхилення (різниця частот) в момент t рівна:

, (5)

 В загальному випадку, коли задана повна фаза коливання у вигляді функції:

 (6)

То миттєве значення частоти в момент t визначається виразом:

 (7)

Розглянемо тепер це все на прикладі модуляції, коли модулююча функція задана у вигляді:

 (8)

Не уточнюючи способу здійснення модуляції, припустимо, що частота генератора змінюється по закону:

 (9)

Тут - середня частота коливання (при відсутності модуляції)

 – середній коефіцієнт пропорційності, який визначає зв’язок між моделюючою напругою та змінами частоти генератора, – частота модуляції, – амплітуда частотного відхилення.

 *–* це є *девіація частоти*, чи просто девіація.

 Вираз для миттєвого значення коливання, частота якого змінюється по закону (9):

, де

 – знаходиться згідно виразу (4.1):

 (11)

Таким чином

 (12)

З виразу (12), видно що періодична модуляція частоти в межах частотою еквівалентна гармонічній варіації фази з тою частотою в межах кута Таким чином, амплітуда фази рівна:

 (13)

Відношення називають *індексом модуляції* і основним параметром кутової модуляції.

 Тепер припустимо, що частота стабільна, а фаза змінюється по закону:

 (14)

 коефіцієнт пропорційності, який визначає зв’язок між модулюючим сигналом та зміною фази коливаня;

 амплітуда зміни фази при модуляції.

 В даному випадку повна фаза коливання визначається сумою:

(15)

а миттєве значення коливання:

 (16)

Миттєва частота у відповідності з виразом (7) буде:

(17)

Враховуючи, що

*,* (18)

 Вираз (17) можна переписати у формі:

 (19)

 Таким чином як видно з виразу (19) та (9) за характером коливання і його властивостями неможна визначити з якою модуляцією маємо справу – частотною чи фазовою.

 Методи виявлення базуються на зміні частоти модуляції чи при одночасній модуляції смугою частот.

*Спектр коливань при гармонічній кутовій модуляції.*

 Запишемо вираз для миттєвого значення коливання , модульованого по частоті чи фазі частотою :

, (20)

(тут для спрощення - )

або в дещо зміненій формі:

 (21)

 Розглянемо спочатку властивості коливання при «неглибокій» модуляції, яка характеризується відносно невеликим значенням фазового відхилення, тобто індексом m<<1.

 В цьому випадку можна рахувати:

Підставляючи це у вираз (21), отримаємо:

 (22)

 Тобто з виразу (22) видно, що спектр коливання, модульованого по частоті чи по фазі, при малому значенні «» складається як і спектр амплітудно-модульованого коливання із несучої частоти та двох бокових частот – верхньої та нижньої .

*Спектр коливання при кутовій модуляції складним сигналом*

 Розглянемо модуляцію двома частотами, коли миттєва частота може бути записана у вигляді:

 (23)

 Повна фаза коливання в момент t буде:

, де

 та

Рівняння коливання, яке модульоване за частотою двома частотами, можна записати у вигляді:

Тобто, при одночасній модуляції двома частотами спектр містить наступні компоненти:

1. Несучу частоту
2. Бокові частоту та
3. Допоміжні бокові частоти виду , де p та n – довільні цілі числа

***Тема 11:* Імпульсна модуляція. Особливості сигналів з ІМ.**

**Спектри ІМ сигналів.**

 В радіотехніці широке застосування отримали різні види імпульсної модуляції, при якій управляючий сигнал накладається на допоміжну імпульсну послідовність.

 Важливе питання при імпульсній модуляції полягає у виборі частоти імпульсів, так званій «тактовій частоті».

 Для покращення використання радіоліній вигідно збільшувати інтервали між імпульсами, тобто знижувати тактову частоту . Але зменшення тактової частоти нижче певного мінімального рівня, який залежить від спектру повідомлення, що передається, є недопустимо, оскільки може призвести до втрати інформації. Саме тут і застосовується теорема Котельнікова чи як її ще називають теорема відліків.

 Коли найбільша частота повідомлення рівна , то інтервали між імпульсами не повинні перевищувати , тобто тактова частота повинна відповідати умові:

 (1)

 Нехай маємо деяку послідовність імпульсів, при цьому умова (1) виконується.



Позначаючи функцію, яка визначає окремий імпульс через f(t), періодичну послідовність можна передавати аналітично у вигляді наступного виразу:

,

Де , де K-ціле число.

Коли в результаті дії керуючого сигналу імпульси змінюються по висоті, зберігаючи при цьому незмінними свою форму, тривалість та положення в часі, то така модуляція називається амплітудно-імпульсною модуляцією, або скорочено АІМ.



Імпульсна послідовність, промодульована за амплітудою синусоїдним сигналом представлена на рисунку. Аналітично ця послідовність може бути представлена рівнянням

 (3)

де – частота модуляції;

 *–* початкова фаза управляючого сигналу

- коефіцієнт (глибина) модуляції сигналу імпульсів, а функція S(t) визначається виразом (2).

 Знайдемо спектр модульованої послідовності (див. рис.), коли відомий спектр не модульованої послідовності з виразом (3) кожному компоненту спектра функції S(t) потрібно домножити на

 Тоді постійна складова функції S(t), яку можна позначити через , дасть добуток

Перша гармоніка функції S(t) дасть добуток виду:

Друга гармоніка функції S(t) дасть добуток виду :

 і т. д.

 Тобто при АІМ до спектра вихідної не модульованої послідовності добавляється компонента з частотою та амплітудного та «бокові частоти» з амплітудами , які розміщуються симетрично відносно частот , тобто гармонік функції S(t). Отриманий в результаті спектр функції представлений на рис.



Пунктирними лініями показані амплітуди додаткових частот, які виникають в результаті модуляції. Аналогічно будують спектр і для більш складної зміни, огинаючої імпульсів.

 Розглянемо тепер часову імпульсну модуляцію, при якій також імпульси, зберігаючи свою форму та величину, зміщуються в часі на величину , яка певним чином зв’язана з напругою модульованого сигналу (чи повідомлення). Приблизний вигляд модульованої послідовності при синусоїдальній модуляції показаний на рис.



Коли амплітуда часового зсуву не залежить від частоти та визначається виключно амплітудою модулюючого сигналу, то часова модуляція може розглядатися як фазо-імпульсна модуляція (ФІМ). В цьому випадку величину часового зсуву K-го імпульсу (при синусоїдально модулюючому сигналі) можна визначити виразом:

 (4)

 – максимальне значення відхилення по часу;

а величина фазового зсуву виразом:

 (5)

 Тут через позначено амплітуду зміщення фази. Припустимо, що модуляція полягає у зміні частоти слідування імпульсів, причому амплітуда частотного відхилення пропорційне амплітуді сигналу та не залежить від частоти модуляції

 Таку різновидність часової модуляції можна розглядати як частотно-імпульсну модуляцію (ЧІМ).

 Як і у випадку неперервного коливання, можна встановити зв’язок між модуляцією фази та модуляцією частоти в спектрі імпульсної послідовності.

 Очевидно, що модуляція фази імпульсів по закону:

 (6)

 Еквівалентна зміні миттєвої частоти слідування по закону:

 (7)

де позначено

 І навпаки, модуляція частоти слідування імпульсів по закону:

Еквівалентна зміні фази по закону

Звідки часовий зсув з врахуванням виразу (6) визначається виразом:

 де

Таким чином при модуляції смугою частот величина не залежить від при ФІМ і обернено пропорційна при ЧІМ.

Окрім перекислених видів модуляції значний практичний інтерес представляє модуляція « по тривалості» (ДІМ). При цьому переважно мається на увазі імпульси прямокутної форми.





На рис. а) представлена імпульсна послідовність при односторонній модуляції по тривалості, коли один із фронтів імпульсу, в даному випадку задній, переміщується на величину , яка пропорційна модульованій напрузі, а другий фронт зберігає своє фіксоване положення.